



# TD n°13: Révisions

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini  
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

## Exercices de révision.

### Exercice 1. Fonctions sans points fixes.

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction entière telle que  $f \circ f$  n'a pas de point fixe.

1. Démontrer à l'aide du théorème de Picard que  $z \mapsto \frac{f(f(z))-z}{f(z)-z}$  est constante.

On remarque tout d'abord que  $f$  ne peut pas avoir de point fixe. Ainsi,  $\frac{f(f(z))-z}{f(z)-z}$  est bien une fonction entière, et elle évite la valeur 0 car  $f(f(z)) \neq z$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . De même, elle évite la valeur 1, car si  $f(f(z)) - z = f(z) - z$  alors  $f(f(z)) = f(z)$  et en appliquant encore  $f$  on a  $f(f(w)) = f(w) = w$  pour  $w = f(z)$ . Ainsi,  $f(f(z)) - z = a(f(z) - z)$  pour un  $a \neq 0, 1$ .

2. En déduire que  $f'(z)$  ne s'annule pas, puis qu'il existe une constante  $a \neq 0$  telle que

$$f'(f(z)) = a + \frac{1-a}{f'(z)}$$

et donc que  $f'(f(z))$  n'atteint pas la valeur  $a$ .

On dérive l'égalité ci-dessus, pour obtenir l'égalité

$$f'(f(z))f'(z) - 1 = af'(z) - a.$$

Si  $f'(z) = 0$ , on trouve  $1 = a$ , ce qui n'est pas possible. On peut donc diviser, et on obtient :

$$f'(f(z)) = a + \frac{1-a}{f'(z)}$$

Comme  $\frac{1-a}{f'(z)} \neq 0$ ,  $f'(f(z))$  ne prend jamais la valeur  $a$ .

3. Démontrer que  $f'$  est constante, puis que  $f$  est une translation.

Comme  $f'(f(z))$  ne s'annule pas et n'atteint pas la valeur  $a$ , elle est constante par le théorème de Picard. Ainsi,  $f'$  est constante sur l'image de  $f$ , qui est par le théorème de Picard  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ , et donc  $f'$  est constante. Il s'ensuit que  $f(z) = pz + q$ , et donc  $f(f(z)) = p^2z + pq + q$ . Si  $p^2 \neq 1$ ,  $p^2z + pq + q = z$  admet une solution, donc  $p^2 = 1$ . Si  $p = -1$ , on a  $f(f(z)) = z$  qui n'a que des points fixes, et donc  $p = 1$  et  $f$  est une translation.

### Exercice 2. Obstructions et exactitude.

Soit  $U$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $S \subseteq U$  un ensemble fini,  $V = U \setminus S$ .

1. Démontrer que la suite

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\text{Res}} \mathbb{C}^S \rightarrow 0$$

est exacte, où on note  $\text{Res}(f) := (\text{Res}_a(f))_{a \in S} \in \mathbb{C}^S$ .

On considère

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\text{Res}} \mathbb{C}^S \rightarrow 0.$$

Une suite exacte est une suite pour laquelle l'image d'une flèche est le noyau de la suivante. La première flèche est l'injection des fonctions constantes dans  $\mathcal{O}(V)$ . L'exactitude en le premier  $\mathcal{O}(V)$  revient à dire que les fonctions constantes (image de  $\mathbb{C}$ ) sont exactement celles de dérivée nulle (noyau de  $d/dz$ ), ce qui est vrai car  $V$  est connexe.

<sup>†</sup>Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

Pour l'exactitude en  $\mathbb{C}^S$ , c'est la surjectivité de  $\text{Res}$  qu'il faut démontrer : pour avoir  $\text{Res}(f) = (\beta_a)_{a \in S}$ , il suffit de prendre  $f = \sum_{a \in S} \frac{\beta_a}{(z-a)}$ .

Reste à voir l'exactitude au deuxième  $\mathcal{O}(V)$  : elle revient à dire que les fonctions dans l'image de  $d/dz$ , c'est-à-dire celles admettant une primitive, sont exactement celles qui n'ont pas de résidu. Les fonctions admettant une primitive n'ont clairement pas de résidus. Dans l'autre sens, si une fonction n'a pas de résidus, on peut (grâce à la caractérisation des fonctions holomorphes sur un disque épointé) l'écrire comme  $f(z) = g(z) + \sum_{a \in S} \frac{1}{(z-a)^2} h_a \left( \frac{1}{z-a} \right)$ , où  $g$  est une fonction holomorphe sur  $U$  et  $h_a$  est une fonction entière. Comme  $U$  est simplement connexe,  $g$  admet une primitive, et si  $H_a$  est une primitive de  $h_a$ , alors  $-H_a \left( \frac{1}{z-a} \right)$  est une primitive de  $\frac{1}{(z-a)^2} h_a \left( \frac{1}{z-a} \right)$ . Ainsi,  $f$  admet bien une primitive.

2. Démontrer que la suite

$$0 \rightarrow 2i\pi\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}(V)^\times \xrightarrow{\text{Res} \circ \text{dlog}} \mathbb{Z}^S \rightarrow 0$$

est exacte, où  $\text{Res}(\text{dlog}(f)) = (\text{Res}_a(f'/f))_{a \in S} \in \mathbb{Z}^S$ .

On considère

$$0 \rightarrow 2i\pi\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}(V)^\times \xrightarrow{\text{Res} \circ \text{dlog}} \mathbb{Z}^S \rightarrow 0.$$

L'exactitude en  $2i\pi\mathbb{Z}$  et  $\mathcal{O}(V)$  est évidente, voyons l'exactitude en  $\mathbb{Z}^S$  : elle revient à dire que pour  $\mathbf{n} = (n_a)_{a \in S}$ , il existe une fonction  $f_{\mathbf{n}}$  telle que  $\text{Res}_a(\text{dlog}(f_{\mathbf{n}})) = n_a$ . On peut pour  $f_{\mathbf{n}}$  prendre  $\prod_{a \in S} (z-a)^{n_a}$ , et on a bien la surjectivité de  $\text{Res} \circ \text{dlog}$ .

Reste l'exactitude en  $\mathcal{O}(V)^\times$ , qui se traduit comme : "une fonction holomorphe inversible est une exponentielle si et seulement si sa dérivée logarithmique n'a pas de résidus". Dans le sens direct, c'est facile : si  $f = e^h$ , alors  $d \log(f) = h'$ , qui n'a pas de résidus car c'est une dérivée. Réciproquement, si  $d \log(f) = f'/f$  n'a pas de résidus, elle admet une primitive  $h$ , et on peut vérifier que  $f e^{-h}$  est constante, donc  $f$  est bien dans l'image de  $\text{exp}$ .

### Exercice 3. Principe de réflexion de Schwarz.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , symétrique par rapport à  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire que  $z \in \Omega$  ssi  $\bar{z} \in \Omega$ . On note  $\Omega^\pm = \{z \in \Omega : \pm \Im(z) > 0\}$  et  $\Omega^0 = \Omega \cap \mathbb{R}$ . On désire démontrer le théorème suivant :

**Théorème.** Soit  $f : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe, vérifiant que  $\lim_{\Im(z) \rightarrow 0} \Im(f(z)) = 0$ . Alors, la formule

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

définit une fonction holomorphe sur  $\Omega^+ \cup \Omega^-$  qui se prolonge à  $\Omega$ .

1. Soit  $u$  une fonction harmonique sur  $\Omega^+$ , vérifiant  $\lim_{\Im(z) \rightarrow 0} u(z) = 0$ . Démontrer que

$$u^*(z) := \begin{cases} u(z), & z \in \Omega^+ \\ -u(\bar{z}), & z \in \Omega^- \\ 0, & z \in \Omega^0 \end{cases}$$

définit une fonction continue sur  $\Omega$  qui satisfait l'égalité de la moyenne et est donc harmonique.

Vérifions que  $u$  satisfait l'égalité de la moyenne en  $z \in \Omega$ . Si  $z \in \Omega^+$ , il suffit de le vérifier pour  $r$  tel que  $\overline{\mathbb{D}}(z, r) \subseteq \Omega^+$ , auquel cas ça découle de l'harmonicité de  $u$ . Si  $z \in \Omega^-$ , on considère  $\overline{\mathbb{D}}(z, r) \subseteq \Omega^-$ , et on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\bar{z} + re^{-i\theta}) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\bar{z} + re^{i\theta}) d\theta = -u(\bar{z})$$

en faisant un changement de variable  $\theta \mapsto 2\pi - \theta$ .

Reste à traiter le cas  $z \in \Omega^0$ . On prend  $r$  tel que  $\overline{\mathbb{D}}(z, r) \subseteq \Omega$ , et les parties supérieure et inférieure de l'intégrale vont se compenser. Explicitement :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi u(\bar{z} + re^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} u(z + re^{-i\theta}) d\theta = 0 = u(z).$$

2. Vérifier que si  $f$  est holomorphe sur  $\Omega^+$ , alors  $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$  est également holomorphe. Il suffit de vérifier l'analyticité : si  $f$  est holomorphe au voisinage de  $a \in \Omega^+$ , on a

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n$$

et donc

$$\overline{f(\bar{z})} = \sum_{n \geq 0} \bar{c}_n (z - \bar{a})^n$$

et  $\overline{f(\bar{z})}$  est holomorphe au voisinage de  $a$ .

3. On suppose à présent que  $\Im(f(z)) \rightarrow 0$  quand  $\Im(z) \rightarrow 0$ . Démontrer que la fonction holomorphe définie par

$$f^*(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega^+ \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in \Omega^- \end{cases}$$

se prolonge en une fonction holomorphe  $f^*$  définie sur  $\Omega$  entier. On pourra penser à démontrer qu'une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D}(0, r)$  à valeurs réelles sur  $] -r, r[$  vérifie  $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$  pour tout  $z \in \mathbb{D}(0, r)$ .

Soit  $u$  la partie imaginaire de  $f$ . Clairement,  $u$  s'étend en  $u^*$  par la question 1. On veut construire un conjugué harmonique à  $u$ , spécifiquement au voisinage de  $\Omega^0$ . Soit  $a \in \Omega^0$ , il existe  $g$  holomorphe définie sur disque  $D$  au voisinage de  $a$  telle que  $\Im(g) = u^*$ . Ainsi,  $g - f^*$  est de dérivée nulle, donc constante sur  $\Omega^+ \cup D$  et  $\Omega^- \cup D$ .

Il suffit à présent de démontrer que  $\overline{g(\bar{z})} = g(z)$  pour conclure, car alors  $g(z) - f(z) = c_+ \in \mathbb{R}$  sur  $D \cap \Omega^+$  et  $g(z) - f^*(z) = \overline{g(\bar{z})} - \overline{f(\bar{z})} = \bar{c}_+ = c_+$  pour  $z \in D \cap \Omega^-$ , donc  $g - f^*$  est constante à  $c_+$  et  $g - c_+$  donne un unique prolongement de  $f$  au voisinage de  $a$ .

Pour démontrer que  $\overline{g(\bar{z})} = g(z)$ , il suffit de se rappeler qu'on peut oublier le côté complexe :  $g|_{]a-r, a+r[}$  définit une fonction analytique réelle sur  $]a-r, a+r[$ , et on peut donc calculer ses coefficients de Taylor réels (qui sont les mêmes que ceux complexes), et ils seront mécaniquement réels, ainsi

$$g(z) = \sum c_n (z - a)^n$$

avec  $c_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} \in \mathbb{R}$ , d'où  $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$ .

#### Exercice 4. Quelques applications du théorème de Rouché.

1. Démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss en utilisant uniquement le théorème de Rouché. On peut supposer  $f(z)$  unitaire,  $n$  son degré.  $f(z) - z^n$  est donc un polynôme de degré  $< n$ . Par croissance comparée, on aura  $|z|^n > |f(z) - z^n|$  pour  $|z|$  assez grand et par Rouché,  $f$  aura donc  $n$  racines comptées avec multiplicité dans le disque correspondant.

2. En appliquant le théorème de Rouché à  $z \sin(z)$  et  $z \sin(z) - 1$ , démontrer que toutes les solutions de  $z \sin(z) = 1$  sont réelles.

Le point délicat ici est de trouver un lacet sur lequel  $|z \sin(z)| > 1$  pour  $|z|$  grand. La réponse est donnée par un rectangle de côtés verticaux  $\pi/2 + n\pi + it$ ,  $-R \leq t \leq R$ . Comme  $|\sin(a + ib)| \geq \sinh(|b|)$  (exercice !), on peut prendre  $R$  aussi grand que l'on veut et la majoration tiendra. Pour vérifier la majoration sur les côtés verticaux, on remarque que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm n\pi + it\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(it) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(it).$$

Comme  $\cos(it) = \cosh(t) \geq 1$ , dès que  $n$  est assez grand on a bien  $|z \sin(z)| > 1$  sur le rectangle. On en déduit que le nombre de solutions de  $z \sin(z) = 1$  dans le rectangle choisi est le même que celui de  $z \sin(z) = 0$ . On sait que les solutions à la deuxième équation sont toutes réelles, et il y en a en particulier  $2n + 1$  (avec multiplicité, celle en 0 comptant double) dans le rectangle choisi (et ce peu importe  $R$ ). D'autre part, en évaluant  $z \sin(z) - 1$  en 0 et en  $\pi/2 + k\pi$ ,  $k = 0, \dots, n$ , on trouve  $n + 1$  racines réelles par le TVI. L'évaluation en  $\pi/2 + k\pi$ ,  $k = -n, \dots, -1$  donne  $n$  autres racines dans le rectangle : on en a trouvé  $2n + 1$  et donc par le théorème de Rouché, on les a toutes trouvées. Comme l'union des rectangles pour  $R > 0$ ,  $n > 0$  recouvre  $\mathbb{C}$ , toutes les solutions de l'équation doivent être réelles.

**Exercice 5. Sommes de fractions rationnelles.**

1. Soit  $f(z) = P(z)/Q(z)$  une fonction rationnelle vérifiant  $\deg(P) + 2 \leq \deg(Q)$ . Démontrer l'égalité

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n) \neq 0} \frac{P(n)}{Q(n)} = -2i\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n) = 0} \operatorname{Res}_n \left( f(z) \frac{1}{e^{2i\pi z} - 1} \right) - 2i\pi \sum_{\alpha \notin \mathbb{Z}, Q(\alpha) = 0} \operatorname{Res}_\alpha \left( f(z) \frac{1}{e^{2i\pi z} - 1} \right).$$

Il suffit d'intégrer  $\frac{2i\pi P(z)}{Q(z)(e^{2i\pi z} - 1)}$  sur le même carré que d'habitude.

2. Supposons de plus que  $f$  est paire, n'a pas de pôles dans  $\mathbb{Z}_{\neq 0}$ , et a un pôle d'ordre  $2k$  (éventuellement  $k = 0$ ) en 0. On suppose de plus que tous les pôles de la fonction, hors 0, sont simples. Démontrer l'égalité :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{P(n)}{Q(n)} = \sum_{k=0}^m c_{2k} \zeta(2m - 2k) - i\pi \sum_{Q(\alpha)=0} \frac{1}{e^{2i\pi\alpha} - 1} \cdot \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

où  $P(z)/Q(z) = z^{-2k} \sum_{m \geq 0} c_{2m} z^{2m}$  et on normalise  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ .

On trouve, d'après la question précédente et par parité de  $f$  :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{P(n)}{Q(n)} = -\frac{1}{2} \operatorname{Res}_0 \left( f(z) \frac{2i\pi}{e^{2i\pi z} - 1} \right) - i\pi \sum_{Q(\alpha)=0} \operatorname{Res}_\alpha \left( f(z) \frac{1}{e^{2i\pi z} - 1} \right).$$

Reste à calculer les résidus. Le résidu en 0 se calcule explicitement par produit de Cauchy de  $\frac{2i\pi}{e^{2i\pi z} - 1} = \sum_{l \geq 0} \frac{B_l}{l!} (2i\pi)^l z^{l-1}$  et  $P(z)/Q(z) = \sum_{m \geq 0} c_{2m} z^{2m-2k}$ . Le terme d'ordre  $-1$  dans ce produit est précisément

$$\sum_{2m-2k+2l-1=-1} c_{2m} \frac{(2i\pi)^{2l} B_{2l}}{(2l)!}$$

qui se transforme en la forme annoncée sans encombre (Le terme d'ordre impair  $B_1$  n'intervient pas car il est multiplié par  $c_{2k-1}$ , qui est nul par parité de  $f$ ). Reste à calculer le résidu en  $\alpha$  racine simple de  $Q$ . On pose  $Q_\alpha(z) = Q(z)/(z - \alpha)$ , qui vérifie  $Q_\alpha(\alpha) = Q'(\alpha)$ . Le résidu de  $f(z) \frac{2i\pi}{e^{2i\pi z} - 1}$  en  $\alpha$  est donc

$$\frac{2i\pi}{e^{2i\pi\alpha} - 1} \cdot \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

**Exercice 6. La sphère de Riemann comme espace projectif et l'action de  $\operatorname{PGL}_2$ .**

On note  $\mathbb{CP}^1$  l'ensemble des droites complexes dans  $\mathbb{C}^2$ . Si  $(u, v) \in \mathbb{C}^2$  est non nul, on note  $[u : v]$  la droite qu'il engendre, et on a  $[\lambda u : \lambda v] = [u : v]$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .

1. Vérifier que  $\mathbb{C}$  s'injecte dans  $\mathbb{CP}^1$  en envoyant  $z$  sur  $[z : 1]$ .

Si  $[z : 1] = [z' : 1]$  alors  $z/1 = z'/1$ .

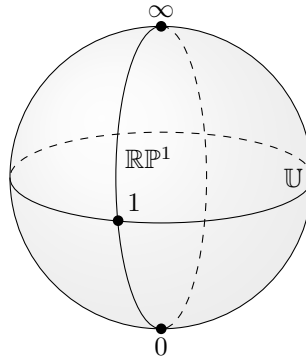
2. Vérifier que  $\mathbb{CP}^1 \setminus \mathbb{C}$  est réduit à un point, la droite  $[1 : 0]$ , que l'on note  $\infty$ .

Si  $(u, v) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ , alors soit  $v \neq 0$  auquel cas  $[u : v] = [u/v : 1]$ , soit  $v = 0$ , auquel cas  $[u : v] = [u : 0] = [1 : 0]$ .

Ainsi,  $\mathbb{CP}^1$  s'identifie naturellement au compactifié d'Alexandroff du plan : la sphère. On le munit de cette topologie. Si  $U \subseteq \mathbb{CP}^1$  est un ouvert contenant l'infini et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction, on dit que  $f$  est holomorphe si elle est holomorphe au voisinage de tout point non-infini et si  $z \mapsto f([1 : z])$  est holomorphe au voisinage de zéro (moralement,  $z \mapsto f(1/z)$  est holomorphe au voisinage de zéro). Si  $f : U \rightarrow \mathbb{CP}^1$  est une fonction, on dit qu'elle est holomorphe si elle est de la forme  $[u(z) : v(z)]$  avec  $u, v$  fonctions holomorphes.

3. Dessiner  $\mathbb{RP}^1$ , le disque unité et le demi-plan de Poincaré sur  $\mathbb{CP}^1$ .

Pour fixer les idées, disons que  $\infty$  est le pôle nord et 0 est le pôle sud. Alors  $\mathbb{RP}^1$  est un grand cercle qui passe par 0 et  $\infty$ , le disque unité est l'hémisphère sud de la sphère, et le demi-plan de Poincaré est un des deux hémisphères (celui qui contient  $i$ , au choix) délimités par le cercle  $\mathbb{RP}^1$ . Ci-dessous,  $\mathbb{CP}^1$  est représenté avec la droite projective réelle, le cercle unité et les points 0, 1,  $\infty$ .



4. Démontrer que pour  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$ , la fonction

$$[z : w] \mapsto [az + bw : cz + dw]$$

est bien définie et holomorphe sur  $\mathbb{CP}^1$ . On appelle homographie de  $\mathbb{CP}^1$  toute application de cette forme.

Il faut vérifier que le point obtenu ne dépend pas des coordonnées choisies. Deux options : soit on remarque que l'application correspond à envoyer la droite  $L = [z : w]$  sur  $gL$ , où  $g$  est la matrice correspondante, soit on remarque que la linéarité de l'application implique directement que  $[\lambda z : \lambda w]$  est envoyé sur  $[\lambda(az + bw) : \lambda(cz + dw)]$ .

Pour l'holomorphic, c'est vrai par définition d'une fonction holomorphic à valeurs dans  $\mathbb{CP}^1$ .

5. Vérifier la cohérence avec la définition des homographies sur des ouverts de  $\mathbb{C}$ .  
Si l'on pose  $w = 1$ , on trouve la formule

$$[z : 1] \mapsto [az + b : cz + d] = \left[ \frac{az + b}{cz + d} : 1 \right].$$

6. Expliciter une homographie qui envoie biholomorphiquement le disque unité  $\mathbb{D}$  sur le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}$ .

Pour s'aider, on peut choisir où on envoie certains points du bord : par exemple, on peut choisir d'envoyer 1 sur 0 et  $-1$  sur l'infini, ce qui donne une homographie de la forme  $\frac{a(z-1)}{b(z+1)}$ . On vérifie que le choix  $a = -i, b = 1$  donne bien une telle homographie car elle envoie  $z = x + iy$  sur  $\frac{2y+i(1-|z|^2)}{1+|z|^2+2x}$ , qui est de partie réelle positive si  $|z|^2 < 1$ , et son inverse, donné par  $z \mapsto \frac{i-z}{z+i}$  envoie  $x + iy$  sur

$$\frac{-x + i(1 - y)}{x + i(y + 1)}$$

dont le module est  $< 1$  si  $y > 0$ .

7. On note  $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$  l'ensemble des applications holomorphes de  $\mathbb{CP}^1$  dans lui-même. Démontrer que l'application  $\text{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$  donnée par

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto ([z : w] \mapsto [az + bw : cz + dw])$$

est compatible à la composition. En déduire que les homographies sont inversibles, et donner la formule pour l'inverse. On note  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$  l'image de cette application.

L'homographie associée à une matrice  $g$  correspond à  $L \mapsto g \cdot L$  pour  $L$  droite complexe dans  $\mathbb{C}^2$ . Ainsi,  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  est compatible à la composition, et l'inverse de l'homographie est donnée par l'inverse de la matrice associée.

8. Vérifier que la restriction de l'application précédente à  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  est toujours  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ .

Pour  $g \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ ,  $g$  et  $\lambda g$  donnent la même homographie. En particulier, en prenant  $\zeta$  une racine carrée du déterminant de  $g$ , on a  $\zeta^{-1}g \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  qui est envoyé sur le même élément que  $g$ .

9. Calculer les noyaux des morphismes  $GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow PGL_2(\mathbb{C})$  et  $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow PGL_2(\mathbb{C})$ .

Supposons  $\frac{az+b}{cz+d} = z$  pour tout  $z$ . L'équivalence en l'infini nous donne  $a/d = 1, c = 0$ . En évaluant en 0, on trouve  $b/d = 0$ , donc  $b = 0$ . On en conclut que la matrice correspondante est une homothétie.

### Exercice 7. Produits de Blaschke

Soit  $\mathbb{D}$  le disque unité. Pour  $a \in \mathbb{D}$ , on définit le *facteur de Blaschke*  $\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\varphi_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

1. Démontrer que  $|z| = 1 \implies |\varphi_a(z)| = 1$  et en déduire que  $\varphi_a$  définit une bijection holomorphe  $\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , d'inverse  $\varphi_{-a}$  et qui se prolonge continument au bord.

On a

$$|z| = 1 \implies |1 - \bar{a}z| = |z(1 - \bar{z}a)| = |z - a| \implies |\varphi_a(z)| = 1.$$

Par le principe du maximum on en déduit que  $|\varphi_a(z)| < 1$  dès que  $z \in \mathbb{D}$ .

Pour voir que  $\varphi_{-a}$  est l'inverse de  $\varphi_a$ , il suffit d'utiliser la formule d'inversion pour les homographies : l'inverse de  $\varphi_a$  est

$$z \mapsto \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} = \varphi_{-a}(z).$$

2. Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique telle que  $\varphi(0) = 0$ . Pour  $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  on définit la *fonction de comptage de Nevanlinna* par

$$N_\varphi(w) := \sum_{\varphi(z)=w} \log \left| \frac{1}{z} \right|$$

où les  $z$  sont comptés avec multiplicité.

(a) Soient  $a_1, \dots, a_n$  tels que  $\varphi(a_j) = w$  pour tout  $j$ , et  $B_n(z) = \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(z)$ . Démontrer que  $\varphi_w \circ \varphi$  s'écrit  $B_n g$ , avec  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ .

Soit  $B_n = \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}$  le produit fini de Blaschke associé aux  $a_j$ . La fonction  $\psi = \varphi_w \circ \varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{D}$  et s'annule en les  $a_j$ , le tout compté avec multiplicité. Donc  $\psi = B_n g$  avec  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ .

(b) Démontrer que  $|g(0)| \leq 1$  à l'aide du principe du maximum.

On sait que  $|B_n(z)| \rightarrow 1$  uniformément quand  $|z| \rightarrow 1$ . Ainsi, comme  $|\psi(z)| \leq 1$  pour tout  $z$ , on a

$$\sup_{|z|=r} |g(z)| \leq \inf_{|z|=r} |1/B_n(z)| \xrightarrow{r \rightarrow 1} 1$$

et donc par principe du maximum,  $|g(0)| \leq \inf_r \sup_{|z|=r} |g(z)| \leq 1$ .

(c) En déduire l'inégalité de Littlewood :

$$N_\varphi(w) \leq \log |1/w|.$$

$$|w| = |\psi(0)| = |B_n(0)g(0)| \leq |B_n(0)| = \left| \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(0) \right| = \prod_{j=1}^n |a_j|.$$

Finalement, en prenant l'inverse et en appliquant log on obtient à la limite

$$\sum_{\varphi(z)=w} \log \left( \frac{1}{|z|} \right) \leq \log(1/|w|).$$

3. Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction analytique bornée et non identiquement nulle. Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  la suite des zéros de  $f$  comptés avec multiplicité. Montrer

$$\sum_{n \geq 1} (1 - |a_n|) < \infty.$$

Comme  $f$  est bornée, on peut supposer que  $\forall z \in \mathbb{D}$ ,  $|f(z)| < 1$  et  $w := f(0) \neq 0$ . Soit  $\varphi = \varphi_w \circ f$  qui vérifie  $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  et  $\varphi(0) = 0$ . En comptant avec multiplicités, on a

$$f(z) = 0 \iff \varphi(z) = -w.$$

D'après la question précédente on a  $\sum_{j=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{|a_j|}\right) \leq \log(1/|w|) < \infty$  et la série de terme général  $\log\left(\frac{1}{|a_j|}\right)$  converge. Comme  $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  par le principe des zéros isolés, on a  $\log\left(\frac{1}{|a_j|}\right) \sim 1 - |a_j|$  et donc finalement la série de terme général  $1 - |a_j|$  converge.

4. Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de points de  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  telle que  $\sum_{n \geq 1} (1 - |a_n|) < \infty$ . Montrer que le produit infini

$$\prod_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{a_n} \varphi_{a_n}$$

converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{D}$  vers une fonction analytique  $B$  qui est bornée en valeur absolue par 1. La fonction  $B$  est appelée le *produit de Blaschke* associé à la suite  $(a_n)_n$ .

*Indication : on pourra commencer par prouver que le produit est de la forme  $\prod(1 + g_n)$  où  $\sum g_n$  converge uniformément sur tout compact.*

Posons

$$b_n(z) := 1 + g_n(z) := \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}.$$

Donc

$$g_n(z) = \frac{(|a_n|^2 - |a_n|)z + a_n(|a_n| - 1)}{a_n(1 - \bar{a}_n z)} = (|a_n| - 1) \frac{|a_n|z + a_n}{1 - \bar{a}_n z},$$

d'où

$$|g_n(z)| \leq \frac{(1 + |z|)(1 - |a_n|)}{|1 - \bar{a}_n z|} \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} (1 - |a_n|).$$

Ceci montre que la série des  $g_n(z)$  est normalement convergente sur tout compact de  $\mathbb{D}$ . Etant donné un compact  $K$  de  $\mathbb{D}$ ,  $g_n|_K$  sera suffisamment petite pour  $n$  assez grand (disons  $n > N_K$ ) pour que  $\log(b_n) = \log(1 + g_n)$  existe. On aura alors

$$\prod_{n \geq 1} b_n(z) = \prod_{n=1}^{N_K} b_n(z) \cdot \exp\left(\sum_{n > N_K} \log(1 + g_n)\right).$$

Comme la série des  $g_n$  converge normalement sur  $K$ , la série des  $\log(1 + g_n)$  converge uniformément (même normalement aussi) sur  $K$ , ce qui garantit la convergence uniforme du produit infini.

5. Soit  $K \subseteq \mathbb{U}$  un fermé. À l'aide des produits de Blaschke, construire une série entière de rayon de convergence 1 dont la somme se prolonge en une fonction analytique au voisinage de tout  $z \in \mathbb{U} \setminus K$  mais au voisinage d'aucun élément de  $K$ .

Commençons par montrer qu'il existe une suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathbb{D}$  telle que  $\sum_{n \geq 1} (1 - |a_n|) < \infty$  et dont l'ensemble des points d'accumulation est exactement  $K$ . Comme  $K$  est un espace métrique compact il est séparable et donc il existe une suite  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  de  $K$  dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est exactement  $K$ . Posons alors  $a_n = (1 - n^{-2})u_n$  pour tout  $n$ . La suite a bien les propriétés voulues puisque  $1 - |a_n| = n^{-2}$  et  $a_n - u_n \rightarrow 0$ . On note  $A$  l'image de la suite et  $A' = \{1/\bar{a}_n : n \geq 1\}$ .

On va démontrer qu'on peut en fait étendre le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \varphi_{a_n}$$

à  $\mathbb{C} \setminus (K \cup A')$ .

Soit  $X \subset \mathbb{C} \setminus (K \cup A')$  un compact. Justifions qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $|1 - \bar{a}_n z| \geq \delta$  pour tout  $z \in X$  et  $n$  entier. Supposons le contraire, alors il existe une suite  $(w_n)_n$  d'éléments de  $X$  et une suite  $(\alpha_n)_n$  d'éléments de  $A$  (ce n'est pas forcément une sous-suite de  $(a_n)_n$ ) telles que  $1 - \bar{\alpha}_n w_n \rightarrow 0$ . Quitte à extraire une sous-suite convergente de ces suites on peut supposer que  $\alpha_n \rightarrow \alpha \in K \cup A$  et

$w_n \rightarrow w \in K \cup A$ . On en déduit que  $1 - \bar{\alpha}w = 0$ , donc  $w = \frac{\alpha}{|\alpha|^2}$ . Si  $\alpha \in K$ , on a  $|\alpha|^2 = 1$ , et donc on a une contradiction car  $X \cap K = \emptyset$ . Sinon,  $\alpha \in A$ , et donc  $\frac{\alpha}{|\alpha|^2}$  est dans  $A'$ , ce qui donne encore une contradiction car  $X \cap A' = \emptyset$ .

On est enfin en mesure de construire la fonction voulue, qui sera le produit de Blaschke  $B$  associé aux  $a_n$ . Soit  $X \subset \mathbb{C} \setminus (K \cup A')$  un compact. Posons  $M = \sup_{z \in K} |z| < \infty$  et  $\delta = \inf_{n \geq 1} |1 - \bar{a}_n z| > 0$ . Rappelons qu'on a établi la majoration

$$|g_n(z)| \leq \frac{(1 + |z|)(1 - |a_n|)}{|1 - \bar{a}_n z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

ce qui donne

$$\sup_{z \in K} |g_n(z)| \leq \frac{(1 + M)(1 - |\bar{a}_n|)}{\delta}.$$

Ainsi  $\sum_n g_n$  converge normalement sur  $K$ , donc le produit  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n(z))$  converge uniformément sur  $K$  et y définit un prolongement holomorphe de  $B$ . Le produit de Blaschke se prolonge donc à  $\mathbb{C} \setminus (K \cup A')$ , et donc au voisinage de tout point de  $\mathbb{U} \setminus K$ . Si  $B$  admet un prolongement analytique  $f$  au voisinage de  $w \in K$ , les zéros de  $f$ , qui sont exactement les  $a_n$ , s'accablent en  $w$  et par prolongement analytique,  $f$  est identiquement nulle mais c'est absurde puisque le produit  $B$  n'est pas nul sur  $\mathbb{D}$  par la question précédente.